Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Факультет «Робототехника и комплексная автоматизация»

Кафедра «Системы автоматизированного проектирования»

**Домашнее задание №4 по дисциплине**

**«Теория вероятностей и математическая статистика»**

**Вариант 14**

Выполнил:

студент группы РК6-36Б

Петраков С.А.

Москва

2020

Оглавление

[Генератор псевдослучайных чисел 4](#_Toc60231436)

[1. Постройте свой генератор с параметрами a = R1, c = G1, X0 = B1, m = 100 (здесь и далее числовые значения берутся из таблиц исходных данных к первому домашнему заданию). Составьте таблицу элементов последовательности до первого повторения, определите период генератора. 4](#_Toc60231437)

[2. Постройте свой генератор с рационально выбранными параметрами a и c (согласно таблицам ниже), X0 = B1, m = 100. Составьте таблицу элементов последовательности до первого повторения, убедитесь в достижении максимального периода генератора. 4](#_Toc60231438)

[3. Для этого возьмите первые n = 50 значений из ранее полученной таблицы. Разбейте отрезок [0;99] на r = 10 равных частей [0;9], [10;19], …, [90;99]. Определите число элементов усечённой последовательности , попавших в соответствующий диапазон и постройте гистограмму. 5](#_Toc60231439)

[4. Для этого рассчитаем значение коэффициента по *n* = 50 точкам: , где *pi* – вероятность попадания случайной величины в соответствующий диапазон (численно соответствует площади под графиком плотности распределения для рассматриваемого диапазона). Для равномерного распределения , и поэтому в рассматриваемой задаче . 6](#_Toc60231440)

[5. В нашем случае требуется определить такое значение уровня значимости, с которым можно принять гипотезу о том, что статистическая выборка соответствует равномерному распределению. Полученный уровень значимости можно будет рассматривать как характеристику качества работы генератора случайных чисел, с помощью которого была получена статистическая выборка. Таблицы критических значений распределения в часто ограничены представлением уровней значимости, близкими к 0 или к 1. Поэтому в рамках решаемой задачи рекомендуется пользоваться расширенным вариантом этой таблицы, в котором представлены и промежуточные значения (приводится ниже). 6](#_Toc60231441)

[6. Требуется рассчитать выборочные характеристики (выборочное среднее, смещённую и исправленную оценки выборочной дисперсии) для n = 5, 10, 25 и 50 и сравнить их с соответствующими характеристиками теоретического равномерного распределения (математическим ожиданием и дисперсией). Результаты свести в таблицу, с указанием величины отклонений от теоретических значений. 7](#_Toc60231442)

[Задание 2(GPSS) 8](#_Toc60231443)

[1. Рассчитайте выборочные средние и исправленные выборочные оценки дисперсии для каждой собранной характеристики при n = 10, 25, 50, 100. 10](#_Toc60231444)

[2. На основе полученных выборок для n = 100 построить гистограммы. Ширину интервалов выбирать не более половины исправленной оценки среднеквадратичного отклонения соответствующей величины. При попадании в крайние интервалы менее 5 значений объединять их с соседними. 11](#_Toc60231445)

[3. Для каждой пары собранных характеристик рассчитайте выборочные ковариации и коэффициенты корреляции (для значений n = 10, 25, 50, 100). 13](#_Toc60231446)

[4. Для тех же значений n = 10, 25, 60 требуется рассчитать доверительные интервалы для математических ожиданий каждой из собранных характеристик с уровнями значимости α = 0,1 и 0,01 (для двусторонней симметричной области). 14](#_Toc60231447)

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| R1 | G1 | B1 | R2 | G2 | B2 | R3 |
| 11 | 10 | 11 | 10 | 9 | 10 | 9 |
| G3 | B3 | R | G | B | n |  |
| 11 | 5 | 1 | 1 | 3 | 5 |

# Генератор псевдослучайных чисел

## Постройте свой генератор с параметрами a = R1, c = G1, X0 = B1, m = 100 (здесь и далее числовые значения берутся из таблиц исходных данных к первому домашнему заданию). Составьте таблицу элементов последовательности до первого повторения, определите период генератора.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i |  | i |  | i |  |
| 0 | 11 | 10 | 11 | 20 | 11 |
| 1 | 31 | 11 | 31 | 21 | 31 |
| 2 | 51 | 12 | 51 | 22 | 51 |
| 3 | 71 | 13 | 71 | 23 | 71 |
| 4 | 91 | 14 | 91 | 24 | 91 |
| 5 | 11 | 15 | 11 | 25 | 11 |
| 6 | 31 | 16 | 31 | 26 | 31 |
| 7 | 51 | 17 | 51 | 27 | 51 |
| 8 | 71 | 18 | 71 | 28 | 71 |
| 9 | 91 | 19 | 91 | 29 | 91 |

Период равен 10

## Постройте свой генератор с рационально выбранными параметрами a и c (согласно таблицам ниже), X0 = B1, m = 100. Составьте таблицу элементов последовательности до первого повторения, убедитесь в достижении максимального периода генератора.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i |  | i |  | i |  | i |  | i |  |
| 0 | 11 | 25 | 86 | 50 | 61 | 75 | 36 | 100 | 11 |
| 1 | 18 | 26 | 93 | 51 | 68 | 76 | 43 | 101 | 18 |
| 2 | 5 | 27 | 80 | 52 | 55 | 77 | 30 | 102 | 5 |
| 3 | 72 | 28 | 47 | 53 | 22 | 78 | 97 | 103 | 72 |
| 4 | 19 | 29 | 94 | 54 | 69 | 79 | 44 | 104 | 19 |
| 5 | 46 | 30 | 21 | 55 | 96 | 80 | 71 | 105 | 46 |
| 6 | 53 | 31 | 28 | 56 | 3 | 81 | 78 | 106 | 53 |
| 7 | 40 | 32 | 15 | 57 | 90 | 82 | 65 | 107 | 40 |
| 8 | 7 | 33 | 82 | 58 | 57 | 83 | 32 | 108 | 7 |
| 9 | 54 | 34 | 29 | 59 | 4 | 84 | 79 | 109 | 54 |
| 10 | 81 | 35 | 56 | 60 | 31 | 85 | 6 | 110 | 81 |
| 11 | 88 | 36 | 63 | 61 | 38 | 86 | 13 | 111 | 88 |
| 12 | 75 | 37 | 50 | 62 | 25 | 87 | 0 | 112 | 75 |
| 13 | 42 | 38 | 17 | 63 | 92 | 88 | 67 | 113 | 42 |
| 14 | 89 | 39 | 64 | 64 | 39 | 89 | 14 | 114 | 89 |
| 15 | 16 | 40 | 91 | 65 | 66 | 90 | 41 | 115 | 16 |
| 16 | 23 | 41 | 98 | 66 | 73 | 91 | 48 | 116 | 23 |
| 17 | 10 | 42 | 85 | 67 | 60 | 92 | 35 | 117 | 10 |
| 18 | 77 | 43 | 52 | 68 | 27 | 93 | 2 | 118 | 77 |
| 19 | 24 | 44 | 99 | 69 | 74 | 94 | 49 | 119 | 24 |
| 20 | 51 | 45 | 26 | 70 | 1 | 95 | 76 | 120 | 51 |
| 21 | 58 | 46 | 33 | 71 | 8 | 96 | 83 | 121 | 58 |
| 22 | 45 | 47 | 20 | 72 | 95 | 97 | 70 | 122 | 45 |
| 23 | 12 | 48 | 87 | 73 | 62 | 98 | 37 | 123 | 12 |
| 24 | 59 | 49 | 34 | 74 | 9 | 99 | 84 | 124 | 59 |

Период достигает максимального периода генератора (m)

## Для этого возьмите первые n = 50 значений из ранее полученной таблицы. Разбейте отрезок [0;99] на r = 10 равных частей [0;9], [10;19], …, [90;99]. Определите число элементов усечённой последовательности , попавших в соответствующий диапазон и постройте гистограмму.

|  |  |
| --- | --- |
| [0; 9] | 2 |
| [10; 19] | 8 |
| [20; 29] | 7 |
| [30; 39] | 2 |
| [40; 49] | 5 |
| [50; 59] | 8 |
| [60; 69] | 2 |
| [70; 79] | 3 |
| [80; 89] | 8 |
| [90; 99] | 5 |

## Для этого рассчитаем значение коэффициента по *n* = 50 точкам: , где *pi* – вероятность попадания случайной величины в соответствующий диапазон (численно соответствует площади под графиком плотности распределения для рассматриваемого диапазона). Для равномерного распределения , и поэтому в рассматриваемой задаче .

## В нашем случае требуется определить такое значение уровня значимости, с которым можно принять гипотезу о том, что статистическая выборка соответствует равномерному распределению. Полученный уровень значимости можно будет рассматривать как характеристику качества работы генератора случайных чисел, с помощью которого была получена статистическая выборка. Таблицы критических значений распределения в часто ограничены представлением уровней значимости, близкими к 0 или к 1. Поэтому в рамках решаемой задачи рекомендуется пользоваться расширенным вариантом этой таблицы, в котором представлены и промежуточные значения (приводится ниже).

В нашем случае , . Тогда ближайшим значением будет .

## Требуется рассчитать выборочные характеристики (выборочное среднее, смещённую и исправленную оценки выборочной дисперсии) для n = 5, 10, 25 и 50 и сравнить их с соответствующими характеристиками теоретического равномерного распределения (математическим ожиданием и дисперсией). Результаты свести в таблицу, с указанием величины отклонений от теоретических значений.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| n |  |  |  |
| 5 | 25 | 49.5 | 24.5 |
| 10 | 32.5 | 49.5 | 17 |
| 25 | 43 | 49.5 | 6.5 |
| 50 | 50.5 | 49.5 | 1 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| n |  |  |  |
| 5 | 578 | 816.75 | 238.75 |
| 10 | 494.25 | 816.75 | 322.5 |
| 25 | 716 | 816.75 | 100.75 |
| 50 | 832.25 | 816.75 | 15.5 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| n |  |  |  |
| 5 | 722.5 | 816.75 | 94.25 |
| 10 | 549.1667 | 816.75 | 267.5833 |
| 25 | 745.8333 | 816.75 | 70.916667 |
| 50 | 849.2346938776 | 816.75 | 32.4846938776 |

# Задание 2(GPSS)

Рассматривается имитационная модель системы массового обслуживания на GPSS. Смоделируем поведение покупателя в магазине, в котором работают 2 кассы, причём к каждой из них выстраивается отдельная очередь, а квалификация сотрудников немного отличается, поэтому время обслуживания распределено с разными параметрами. Все случайные интервалы времени для простоты будем считать равномерно распределёнными (но независимыми, привязанными к разным потокам случайных чисел). Каждая касса будет представлена одноканальным устройством, обращение к которым будем осуществлять по номерам. Очереди также будут идентифицироваться номерами, без введения символьных имён.

Моделирование будем проводить в течение 1 часа, в качестве единицы времени будем выбирать секунду. Время между приходом покупателей распределено на отрезке [0; R1+G1+B1]. Время обслуживания на первой кассе распределено на отрезке [R1; R1+G1+B1]. Время обслуживания на второй кассе распределено на отрезке [G1; R1+G1+B1].

При принятии решения покупатель сперва проверяет, есть ли свободная касса, и, если есть, направляется к ней. Если же обе кассы заняты, то выбирает кассу, очередь к которой в данный момент короче (очередь понимается с бытовой точки зрения, хотя модель можно было бы упростить, если иначе выбрать расположение блоков DEPART). Если же свободны обе кассы, или очередь к ним одинакова, то выбирается первая касса.

Перед описанием модели используем конструкцию EQU (сокращение от слова «эквивалентность») для удобства изменения привязки к потокам случайных чисел. По смыслу она аналогична директиве define препроцессора языка C.

rnd EQU 1

GENERATE (uniform(rnd,0,32))

GATE U 1,metka1

GATE U 2,metka2

TEST LE Q1,Q2,metka2

metka1 QUEUE 1

SEIZE 1

DEPART 1

ADVANCE (uniform(rnd+1,11,32))

RELEASE 1

TERMINATE

metka2 QUEUE 2

SEIZE 2

DEPART 2

ADVANCE (uniform(rnd+2,10,32))

RELEASE 2

TERMINATE

GENERATE 3600

TERMINATE 1

START 1

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| rnd | 1 | 2 | 1 | 2 | rnd | 1 | | 2 | 1 | | 2 |
| Загруженность | | Средняя длина очереди | |  | | Загруженность | | | Средняя длина очереди | | |
| 1 | 0,764 | 0,487 | 0,188 | 0,046 | 51 | 0,739 | | 0,511 | 0,128 | | 0,017 |
| 2 | 0,79 | 0,517 | 0,203 | 0,082 | 52 | 0,815 | | 0,568 | 0,214 | | 0,052 |
| 3 | 0,788 | 0,51 | 0,165 | 0,056 | 53 | 0,775 | | 0,564 | 0,122 | | 0,029 |
| 4 | 0,773 | 0,538 | 0,146 | 0,023 | 54 | 0,752 | | 0,488 | 0,102 | | 0,027 |
| 5 | 0,805 | 0,497 | 0,191 | 0,043 | 55 | 0,775 | | 0,548 | 0,267 | | 0,17 |
| 6 | 0,827 | 0,534 | 0,261 | 0,078 | 56 | 0,812 | | 0,549 | 0,221 | | 0,055 |
| 7 | 0,773 | 0,478 | 0,155 | 0,053 | 57 | 0,775 | | 0,489 | 0,163 | | 0,036 |
| 8 | 0,771 | 0,549 | 0,209 | 0,093 | 58 | 0,757 | | 0,542 | 0,183 | | 0,047 |
| 9 | 0,802 | 0,521 | 0,228 | 0,07 | 59 | 0,751 | | 0,567 | 0,147 | | 0,056 |
| 10 | 0,785 | 0,519 | 0,208 | 0,089 | 60 | 0,788 | | 0,584 | 0,221 | | 0,073 |
| 11 | 0,841 | 0,619 | 0,42 | 0,23 | 61 | 0,781 | | 0,535 | 0,156 | | 0,059 |
| 12 | 0,817 | 0,595 | 0,28 | 0,1 | 62 | 0,813 | | 0,573 | 0,177 | | 0,042 |
| 13 | 0,781 | 0,491 | 0,172 | 0,031 | 63 | 0,799 | | 0,542 | 0,178 | | 0,04 |
| 14 | 0,748 | 0,523 | 0,117 | 0,027 | 64 | 0,778 | | 0,544 | 0,225 | | 0,057 |
| 15 | 0,768 | 0,544 | 0,164 | 0,052 | 65 | 0,779 | | 0,541 | 0,18 | | 0,042 |
| 16 | 0,779 | 0,494 | 0,18 | 0,027 | 66 | 0,798 | | 0,56 | 0,188 | | 0,03 |
| 17 | 0,778 | 0,51 | 0,169 | 0,059 | 67 | 0,757 | | 0,51 | 0,206 | | 0,068 |
| 18 | 0,798 | 0,558 | 0,236 | 0,097 | 68 | 0,81 | | 0,599 | 0,248 | | 0,061 |
| 19 | 0,774 | 0,568 | 0,138 | 0,025 | 69 | 0,825 | | 0,579 | 0,212 | | 0,072 |
| 20 | 0,799 | 0,546 | 0,213 | 0,074 | 70 | 0,77 | | 0,449 | 0,121 | | 0,047 |
| 21 | 0,784 | 0,497 | 0,182 | 0,032 | 71 | 0,777 | | 0,513 | 0,147 | | 0,043 |
| 22 | 0,815 | 0,598 | 0,282 | 0,12 | 72 | 0,79 | | 0,543 | 0,255 | | 0,109 |
| 23 | 0,784 | 0,567 | 0,194 | 0,052 | 73 | 0,756 | | 0,499 | 0,148 | | 0,05 |
| 24 | 0,802 | 0,594 | 0,353 | 0,192 | 74 | 0,775 | | 0,55 | 0,172 | | 0,057 |
| 25 | 0,781 | 0,563 | 0,201 | 0,071 | 75 | 0,788 | | 0,551 | 0,224 | | 0,059 |
| 26 | 0,784 | 0,497 | 0,182 | 0,032 | 76 | 0,763 | | 0,634 | 0,216 | | 0,112 |
| 27 | 0,766 | 0,542 | 0,138 | 0,029 | 77 | 0,803 | | 0,577 | 0,244 | | 0,08 |
| 28 | 0,767 | 0,507 | 0,152 | 0,053 | 78 | 0,763 | | 0,48 | 0,148 | | 0,021 |
| 29 | 0,727 | 0,503 | 0,0124 | 0,037 | 79 | 0,793 | | 0,552 | 0,241 | | 0,113 |
| 30 | 0,806 | 0,529 | 0,252 | 0,071 | 80 | 0,806 | | 0,576 | 0,227 | | 0,052 |
| 31 | 0,794 | 0,572 | 0,209 | 0,063 | 81 | 0,761 | | 0,507 | 0,121 | | 0,036 |
| 32 | 0,809 | 0,516 | 0,249 | 0,088 | 82 | 0,796 | | 0,591 | 0,225 | | 0,073 |
| 33 | 0,747 | 0,474 | 0,128 | 0,033 | 83 | 0,778 | | 0,528 | 0,128 | | 0,005 |
| 34 | 0,826 | 0,667 | 0,431 | 0,247 | 84 | 0,777 | | 0,55 | 0,262 | | 0,107 |
| 35 | 0,798 | 0,555 | 0,2 | 0,044 | 85 | 0,728 | | 0,533 | 0,105 | | 0,01 |
| 36 | 0,808 | 0,553 | 0,312 | 0,142 | 86 | 0,786 | | 0,547 | 0,183 | | 0,07 |
| 37 | 0,801 | 0,594 | 0,17 | 0,024 | 87 | 0,767 | | 0,525 | 0,155 | | 0,059 |
| 38 | 0,762 | 0,544 | 0,186 | 0,045 | 88 | 0,772 | | 0,476 | 0,142 | | 0,044 |
| 39 | 0,7772 | 0,551 | 0,2 | 0,053 | 89 | 0,781 | | 0,566 | 0,218 | | 0,063 |
| 40 | 0,762 | 0,519 | 0,166 | 0,05 | 90 | 0,78 | | 0,532 | 0,223 | | 0,075 |
| 41 | 0,8 | 0,581 | 0,252 | 0,055 | 91 | 0,762 | | 0,486 | 0,114 | | 0,015 |
| 42 | 0,776 | 0,538 | 0,137 | 0,018 | 92 | 0,799 | | 0,549 | 0,212 | | 0,047 |
| 43 | 0,764 | 0,586 | 0,228 | 0,074 | 93 | 0,749 | | 0,465 | 0,125 | | 0,034 |
| 44 | 0,777 | 0,522 | 0,21 | 0,062 | 94 | 0,788 | | 0,539 | 0,146 | | 0,046 |
| 45 | 0,784 | 0,583 | 0,353 | 0,235 | 95 | 0,788 | | 0,593 | 0,237 | | 0,053 |
| 46 | 0,826 | 0,589 | 0,211 | 0,058 | 96 | 0,795 | | 0,548 | 0,209 | | 0,077 |
| 47 | 0,758 | 0,481 | 0,116 | 0,025 | 97 | 0,781 | | 0,522 | 0,244 | | 0,097 |
| 48 | 0,766 | 0,558 | 0,236 | 0,113 | 98 | 0,822 | | 0,596 | 0,238 | | 0,103 |
| 49 | 0,822 | 0,611 | 0,307 | 0,126 | 99 | 0,803 | | 0,574 | 0,183 | | 0,049 |
| 50 | 0,806 | 0,552 | 0,271 | 0,101 | 100 | 0,766 | | 0,553 | 0,166 | | 0,041 |

## Рассчитайте выборочные средние и исправленные выборочные оценки дисперсии для каждой собранной характеристики при n = 10, 25, 50, 100.

Загруженность 1 канала

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| n |  |  |  |
| 10 | 0.7878 | 0.00033336 | 0.0003704 |
| 25 | 0.78908 | 0.0004243136 | 0.0004419933 |
| 50 | 0.786804 | 0.0005320024 | 0.0005428596 |
| 100 | 0.783822 | 0.0004983007 | 0,0005033341 |

Загруженность 2 канала

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| n |  |  |  |
| 10 | 0.515 | 0.0004604 | 0.0005115556 |
| 25 | 0.53668 | 0.0014438976 | 0.00150406 |
| 50 | 0.54282 | 0.0016749076 | 0.0017090894 |
| 100 | 0.54238 | 0.0015287356 | 0,0015441774 |

Средняя длина очереди 1 канала

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| n |  |  |  |
| 10 | 0.1954 | 0.00108384 | 0.0012042667 |
| 25 | 0.2102 | 0.00437528 | 0.0045575833 |
| 50 | 0.201508 | 0.0063920211 | 0.0065224705 |
| 100 | 0.196214 | 0.0044808538 | 0,004526115 |

Средняя длина очереди 2 канала

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| n |  |  |  |
| 10 | 0.0633 | 0.00046481 | 0.0005164556 |
| 25 | 0.07288 | 0.0023590656 | 0.00245736 |
| 50 | 0.21206 | 0.4632836164 | 0.4727383841 |
| 100 | 0.13483 | 0.2380616611 | 0,2404663243 |

## На основе полученных выборок для n = 100 построить гистограммы. Ширину интервалов выбирать не более половины исправленной оценки среднеквадратичного отклонения соответствующей величины. При попадании в крайние интервалы менее 5 значений объединять их с соседними.

Загруженность 1 канала

|  |  |
| --- | --- |
| Интервал | Количество |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

Загруженность 2 канала

|  |  |
| --- | --- |
| Интервал | Количество |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

Средняя длина очереди 1 канала

|  |  |
| --- | --- |
| Интервал | Количество |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

Средняя длина очереди 2 канала

|  |  |
| --- | --- |
| Интервал | Количество |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

## Для каждой пары собранных характеристик рассчитайте выборочные ковариации и коэффициенты корреляции (для значений n = 10, 25, 50, 100).

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| n | Коэффициент загрузки | | Средняя длина очереди | |
| Выборочная ковариация | Коэффициент корреляции | Выборочная ковариация | Коэффициент корреляции |
| 10 | 0.000091 | 0.000963 | 0.000544 | 0.026101 |
| 25 | 0.000436 | 0.001579 | 0.003165 | 0.026250 |
| 50 | 0.000559 | 0.000893 | 0.003688 | 0.013278 |
| 100 | 0.000501 | 0.000414 | 0.002474 | 0.005925 |

## Для тех же значений n = 10, 25, 60 требуется рассчитать доверительные интервалы для математических ожиданий каждой из собранных характеристик с уровнями значимости α = 0,1 и 0,01 (для двусторонней симметричной области).

Загруженность 1 канала

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| n |  |  |
| 10 |  |  |
| 25 |  |  |
| 60 |  |  |

Загруженность 2 канала

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| n |  |  |
| 10 |  |  |
| 25 |  |  |
| 60 |  |  |

Средняя длина очереди 1 канала

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| n |  |  |
| 10 |  |  |
| 25 |  |  |
| 60 |  |  |

Средняя длина очереди 2 канала

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| n |  |  |
| 10 |  |  |
| 25 |  |  |
| 60 |  |  |